# 32. Abel's integral equation.

f

佐藤常三（京大）

誰シモAbel's integral equationノ解法ハ實際巧妙ナ技巧デアルコトヲ沁ミジミ感ジサセラレルコトト思ヒマス．又物理學上ノ問題デ隨分ト此ノ形ニ歸着セシメラレルモノノ多イコトモ經驗シマス．扨テコノ基本的デ古典的ナモノハ，

$$(1)\qquad \int_{s=+0}^{x} \frac{\varphi(s)\,ds}{(x-s)^{\alpha}} = f(x) \qquad (0<\alpha<1)$$

デアリマス，此ノ解ハ

$$(2)\qquad \varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{z=+0}^{x}\frac{f(z)\,dz}{(x-z)^{1-\alpha}}$$

デアリマス，單ニ計算ノミヲ示シマスガ使用スル函數ニハ適當ニ條件ヲ與ヘタモノトシテオキマス—(2)ヲ發展サセテ

$$(3)\qquad \varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{f(+0)}{x^{1-\alpha}} + \int_{z=+0}^{x}\frac{f'(z)\,dz}{(x-z)^{1-\alpha}}\right)$$

トシタノハGoursatデアルコトハヨク知ラレテ居マス，右邊ノ積分ヲ更ニ發展サセマスト

$$(4)\qquad \varphi(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{f(+0)}{x^{1-\alpha}} + \frac{f'(+0)}{\alpha}x^{\alpha} + \frac{f''(+0)}{\alpha(\alpha+1)}x^{\alpha+1} + \cdots\cdots \right.$$
$$\left. + \frac{f^{(n)}(+0)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}x^{\alpha+n-1} + \frac{1}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}\int_{z=+0}^{x}(x-z)^{\alpha+n-1}f^{(n+1)}(z)\,dz\right)$$

(1)ノ形ノ擴張ヲ考ヘマス，

$$(5)\qquad \int_{s=+0}^{x}(x-s)^{\beta}\varphi(s)\,ds = f(x) \qquad (\beta>-1,\ \beta\neq 0)$$

コレハタシカニ(1)ヲ含ミマス，コノ様ニ$(x-s)$ノexponentニヨッテ，Abelノ積分方程式ノ擴張ガRudolf Rothe; Zur Abelschen Integralgleichung, Math. Zeit

Bd. 33 (1931) pp. 375 — 387 ノ論文ニアリマス。私ハ次ノ如キ擴張ヲ考ヘテ、其ノ結果ニコノ論文ノ内容ヲ拜借シテ了ヒマシタ。 (1) ニ對シテ

(A) $$\int_{+0}^{x}\int_{+0}^{s}\int_{+0}^{s_1}\cdots\int_{+0}^{s_{n-2}}\frac{\varphi(s_{n-2})}{(x-s)^{\alpha}(s-s_1)^{\alpha_1}\cdots(s-s_{n-2})^{\alpha_{n-2}}}\,ds\,ds_1\cdots ds_{n-2}=f(x)$$

(B) $$\int_{a+0}^{\tau(x)}\frac{\varphi(s)}{[\tau(x)-s]^{\alpha}}\,ds=f(x) \qquad (\tau(+0)=a)$$

(C) $$\int_{+0}^{x}\frac{\varphi(s)\,ds}{[\tau(x)-\tau(s)]^{\alpha}}=f(x)$$

(D) (A), (B), (C) ノ混合物

ヲ考ヘタノデアリマス。(B) ハ (C) ニ變換サレマスカラマヅ (C) カラ始メマス。積分變數ヲ

$$\left\{\begin{aligned}\tau(x)&=\tau(s)+[\tau(z)-\tau(s)]t\\ \tau'(x)dx&=[\tau(z)-\tau(s)]dt\end{aligned}\right.$$

デ $x\to t$ ニ變換シマスト

$$\int_{x=s+0}^{z}\frac{\tau'(x)\,dx}{[\tau(z)-\tau(x)]^{1-\alpha}[\tau(x)-\tau(s)]^{\alpha}}=\int_{+0}^{1}\frac{dt}{(1-t)^{1-\alpha}t^{\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$$

コレヲ利用シテ全ク古典的ナ場合ノ處理ト同樣ニシマスト、(2) ニ對應シテ

(2') $$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{z=+0}^{x}\frac{f(z)\tau'(z)\,dz}{[\tau(x)-\tau(z)]^{1-\alpha}}$$

(3) ニ對應シテ

(3') $$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{[\tau(x)-\tau(+0)]^{\alpha-1}\tau'(x)f(+0)+\tau'(x)\int_{z=+0}^{x}\frac{f'(z)\,dz}{[\tau(x)-\tau(z)]^{1-\alpha}}\right\}$$

(4) ニ對應シテ

(4') $$\varphi(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{f(+0)}{\tau_{1-\alpha}}+\frac{f_1(+0)}{\alpha}\tau_{\alpha}+\frac{f_2(+0)}{\alpha(\alpha+1)}\tau_{\alpha+1}+\cdots\right.$$
$$+\frac{f_n(+0)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}\tau_{\alpha+n-1}+\frac{\tau'(x)}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}\int_{z=+0}^{x}f_n'(z)[\tau(x)-\tau(z)]^{\alpha}d$$

但シ　$f_i(z) \equiv \dfrac{f'_{i-1}(z)}{\tau'(z)}$,　$f_1(z) \equiv \dfrac{f'(z)}{\tau'(z)}$,　$(i=1,2,\cdots,n)$,

$$\tau_q \equiv \left[\tau(x)-\tau(+0)\right]^q \tau'(x).$$

勿論冒頭ニ断ハッタ様ニ $f(+0)$, $f_1(+0) \equiv \dfrac{f'(+0)}{\tau'(+0)}\left(=\lim\limits_{z\to+0}\dfrac{f'(z)}{\tau'(z)}\right)$, $\cdots\cdots$ 等ノ存在ガ吟味サレネバナリマセン、以上ノ結果ニ Rothe ノ拡張 (7) ヲ借用デキマス。扨テ (A) ハ

$$\int_{+0}^{s}\int_{+0}^{s_1}\cdots\cdots\cdots\cdots\, ds_1 ds_2\cdots ds_{n-2} \equiv \Phi(s)$$

トオケバ

$$\int_{+0}^{x}\frac{\Phi(s)}{(x-s)^{\alpha}}\,ds = f(x)$$

トナルカラ、古典的ノ問題ニ歸着セシメラレマス。コレデ (D) ガ完全ニ処理デキルト思ヒマス。

附記：コノ理論ハ化学上重要ナ応用問題ヲ解決スルモノデ、追テ近日中本論ト共ニ発表シマス。

(4月7日受取).